

Tích phân mặt (tiếp theo) và công thức Stokes

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 25 tháng 12 năm 2025

Nhắc lại: Tích phân mặt loại một và loại hai

Cho mặt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ với vết $S = r(D)$.

- Cho $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. **Tích phân mặt loại một** của f trên r là

$$\iint_r f \, dS = \iint_D f(r(u, v)) \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Tích phân mặt loại một chính là *tổng giá trị của hàm trên mặt*.

- Cho F là một trường vectơ trên S , tức là $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. **Tích phân mặt loại hai** của F trên r là

$$\iint_r F \cdot d\vec{S} = \iint_D F(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v)) \, du \, dv.$$

Tích phân mặt loại hai là *tổng của thành phần pháp tuyến của trường trên mặt*. Đại lượng này dùng để đại diện cho lượng của trường đi xuyên qua mặt, tức là *thông lượng* (flux).

Mặt $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ được gọi là

- ▶ **đơn** (simple) nếu r là đơn ánh,
- ▶ **chính quy** (regular) nếu hai vectơ $r_u(u, v)$ và $r_v(u, v)$ xác định và luôn không cùng phương trên D , tức là $r_u(u, v) \times r_v(u, v) \neq \vec{0}$ trên D .

Một cách trực quan, mặt là chính quy nếu pháp tuyến có thể được xác định.

Tương tự như trong tích phân đường, ta có kết quả sau đây, nói rằng với giả thiết nhất định thì hai mặt chính quy có cùng vết cơ bản chỉ sai khác một phép đổi biến.

Bổ đề (11.9)

Cho D và D' là tập con đóng, bị chặn của $\mathbb{R}^2$ và cho $r : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ và $r' : D' \rightarrow \mathbb{R}^3$ là hai mặt đơn, liên tục, và chính quy trên phần trong của miền xác định, có cùng vết.

Khi đó, $r(\partial D) = r'(\partial D')$ và $r'^{-1} \circ r : \mathring{D} \rightarrow \mathring{D}'$ là một vi đồng phôi.

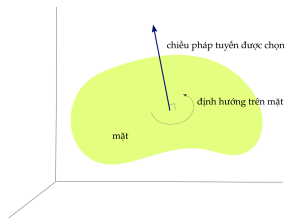
Tập $r(\partial D) = r'(\partial D')$, ảnh của biên của miền xác định của mặt, là **biên của mặt cong** $S = r(D) = r'(D')$, ký hiệu là ∂S .

Tương tự như trong tham số hóa đường cong, hai mặt r và r' có **cùng định hướng** nếu $\varphi = r'^{-1} \circ r$ là một phép đổi biến bảo toàn định hướng; và **trái định hướng** nếu φ là một phép đổi biến đảo ngược định hướng.

Nhắc lại: *hai mặt cùng định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn cùng chiều, và trái định hướng khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến luôn trái chiều.*

Tập điểm và định hướng

Một tập điểm được gọi là một **mặt cong** nếu tập điểm đó là vết của một mặt như trong Bổ đề 11.9. Mỗi lớp các tham số hóa có cùng định hướng của mặt cong được gọi là một **định hướng của mặt cong**.



Hình: Miêu tả trực quan, mặt được định hướng theo *quy tắc bàn tay phải*: ngón tay cái của bàn tay phải hướng theo chiều pháp tuyến được chọn, thì lòng bàn tay phải uốn theo định hướng của mặt.

Trong môn học này, ta thường chỉ cần hình dung trực quan **một định hướng trên mặt cong là một chiều pháp tuyến được chọn trên mặt cong đó**.

Ví dụ: mặt đồ thị

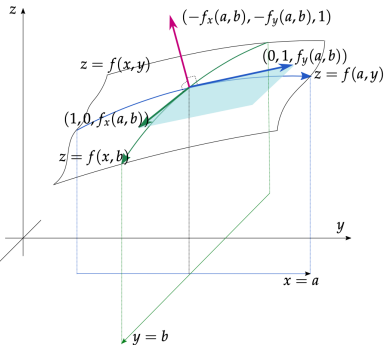
Cho hàm thực f trơn trên một tập mở chứa D . Xét mặt

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad \text{với } (x, y) \in D.$$

Vết của r là mặt đồ thị $z = f(x, y)$. Ta có hai vectơ tiếp xúc là:

$$r_x(x, y) = (1, 0, f_x) \quad \text{và} \quad r_y(x, y) = (0, 1, f_y),$$

với $r_x(x, y) \times r_y(x, y) = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0$.



Như vậy, mặt được tham số hóa bởi r là chính quy.

Vì $r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$ hướng về nửa không gian trên (do $z > 0$), nên đây được gọi là **mặt hướng lên**.

Ví dụ: (định hướng của mặt cầu)

Xét một phần mặt cầu đơn vị tâm O có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ với $x, y, z > 0$. Ta đã biết tham số hóa mặt cầu này:

$$r(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right), \quad x > 0, y > 0.$$

Một cách khác để tham số hóa mặt cầu này là sử dụng tọa độ cầu:

$$r(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Với phép đổi biến $(\phi, \theta) \mapsto (x, y)$, vì $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)} = \sin \phi \cos \phi > 0$, nên phép đổi biến bảo toàn định hướng. Như vậy, hai tham số hóa này có cùng định hướng.

Hai vectơ pháp tuyến của hai tham số hóa này có cùng hướng, là hướng ra ngoài quả cầu bao bởi mặt cầu.

Tích phân trên mặt cong

Trên những mặt đơn xác định trên tập con đóng, bị chặn có diện tích của $\mathbb{R}^2$, chính quy trên tập mở chứa miền xác định, với cùng vết, thì

- (a) tích phân mặt loại một là như nhau,
- (b) tích phân mặt loại hai là như nhau nếu hai mặt cùng định hướng và đối nhau nếu hai mặt trái định hướng.

Các bước tính tích phân mặt trên một mặt cong

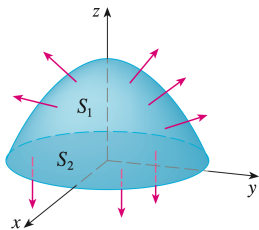
1. Chọn một tham số hóa đơn, chính quy *bất kỳ* trên mặt cong.
2. Xác định đây là tích phân mặt loại một hay loại hai.
3. Thay tham số hóa vào công thức trong định nghĩa của đúng loại tích phân để tính.
4. Nếu là tích phân mặt loại hai thì mặt được cho thêm một định hướng, thường ở dạng trực quan.

Xác định tham số hóa đã chọn ở Bước 1 là cùng định hướng hay trái định hướng đã cho.

Nếu là trái định hướng thì lấy giá trị đối của tích phân đã thu được ở Bước 3.

Ví dụ

Tính tích phân $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, trong đó $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, và S là biên của khối $E \subset \mathbb{R}^3$ bị chặn bởi paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng xy , định hướng ra ngoài khối E .



Mặt paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ giao mặt phẳng xy tạo thành đường tròn $1 - x^2 - y^2 = 0$, nghĩa là đường tròn tâm O bán kính 1.

Gọi S_1 là mặt $z = 1 - x^2 - y^2$, định hướng lên trên của khối E , được tham số hóa bởi

$$S_1(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2),$$

trong đó (x, y) nằm trong hình tròn tâm O , bán kính 1.

Ta tính $S_{1x} = (1, 0, -2x)$, $S_{1y} = (0, 1, -2y)$, và

$$S_{1x} \times S_{1y} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{pmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}.$$

Vì thành phần z là 1, hướng lên, nên S_1 có cùng định hướng như đề bài.
Ta tính:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} (y, x, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dA \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (4xy + 1 - x^2 - y^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Mặt S_2 (cũng là mặt phẳng xy) được tham số hóa bởi $S_2(x, y) = (x, y, 0)$, trong đó (x, y) nằm trong hình tròn tâm O , bán kính 1.

Ta có $S_{2x} \times S_{2y} = (0, 0, 1)$, nên vectơ này hướng lên nên trái định hướng với đề bài cho. Ta tính:

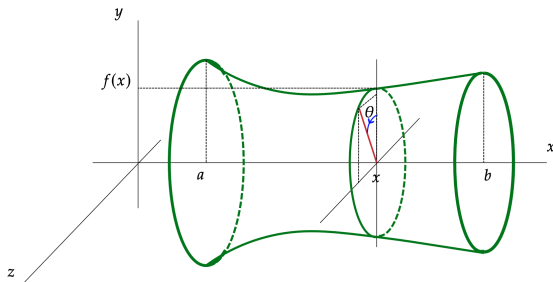
$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y, x, 0) \cdot (0, 0, 1) dA = 0.$$

Do đó, tích phân đã cho là:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Ví dụ: diện tích mặt tròn xoay

Tính diện tích của mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đường đồ thị $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, quanh trục x . Giả sử f trơn và $f \geq 0$.



Hình: Mặt tròn xoay và tham số hóa.

Mặt tròn xoay được tham số hóa bởi

$$\varphi(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta),$$

trong đó $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ta tính:

$$\varphi_x = (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta),$$

$$\varphi_\theta = (0, -f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta),$$

$$\begin{aligned}\varphi_x \times \varphi_\theta &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f'(x) \cos \theta & f'(x) \sin \theta \\ 0 & -f(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= f'(x)f(x)\vec{i} - f(x)\cos(\theta)\vec{j} - f(x)\sin(\theta)\vec{k}.\end{aligned}$$

Nếu $f > 0$ thì $\|\varphi_x \times \varphi_\theta\| > 0$, nên đây là một tham số hóa đơn chính quy của mặt.

Diện tích mặt tròn xoay là:

$$\begin{aligned}& \iint_{a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \|\varphi_x \times \varphi_\theta\| \, dx \, d\theta \\&= \iint_{a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \sqrt{[f'(x)f(x)]^2 + [f(x)]^2} \, dx \, d\theta \\&= \iint_{a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, d\theta \\&= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.\end{aligned}$$



Ứng dụng: Tính diện tích mặt cầu

Từ ví dụ trên, ta có thể áp dụng để tính diện tích mặt cầu, bằng cách xem quả cầu như là khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay nửa đường tròn $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$ quanh trục x .

Ta tính được diện tích mặt cầu tâm O , bán kính R là:

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$



Mối liên hệ giữa hai loại tích phân mặt

Giả sử hai mặt r và r' có cùng định hướng. Giả sử tại điểm p , ta có:

$$p = r(u, v) = r'(s, t)$$

với $(u, v) \in \mathring{D}$ và $(s, t) \in \mathring{D}'$. Với φ là một phép đổi biến thì

$$(r \circ \varphi)_s \times (r \circ \varphi)_t = (r_u \times r_v) \det J_\varphi(s, t),$$

ta có được hai vectơ $r_u \times r_v$ và $r'_s \times r'_t$ có cùng phương cùng chiều.

Vectơ pháp tuyến đơn vị tại p :

$$n(p) = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|} = \frac{r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)}{\|r'_s(s, t) \times r'_t(s, t)\|}$$

được xác định không phụ thuộc vào cách chọn tham số hóa cùng định hướng.

Ta tính tích phân:

$$\begin{aligned}& \iint_S \vec{F} \cdot n \, dS \\&= \iint_D \vec{F}(r(u, v)) \cdot \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{\|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\|} \|r_u(u, v) \times r_v(u, v)\| \, dA \\&= \iint_D \vec{F}(r(u, v)) \cdot (r_u(u, v) \times r_v(u, v)) \, dA \\&= \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S F \cdot n \, dS.$$

Điều này khẳng định lại rằng tích phân mặt loại hai là *tổng thành phần pháp tuyến của trường trên mặt*.

So sánh với tích phân đường loại hai là *tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường*:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \int_C F \cdot T \, ds,$$

và ta cũng nhớ lại công thức thông lượng cho tích phân đường:

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, ds = \iint_D \operatorname{div} F \, dA,$$

trong đó tích phân $\int_{\partial D} F \cdot n \, ds$ là tổng thành phần pháp tuyến ngoài của F dọc theo biên ∂D .

Chương 12: Công thức Stokes

Định nghĩa toán tử curl

Cho $F = (P, Q, R)$ là trường theo ba biến (x, y, z) trên $\mathbb{R}^3$ thì

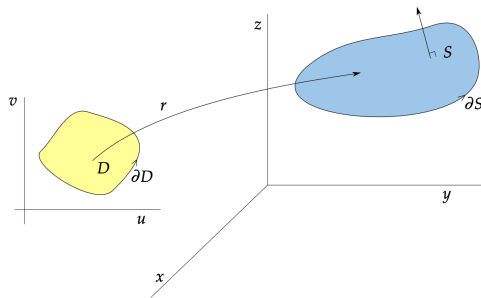
$$\begin{aligned}\operatorname{curl} F &= \operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Trường $\operatorname{curl} F$ được gọi là **trường xoay** của trường F .

Ví dụ: Nếu $F = (-y^2, x, z^2)$, thì

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{pmatrix} = (0, 0, 1 + 2y).$$

Giới thiệu về công thức Stokes



Công thức Stokes là một phát triển của Công thức Green lên không gian ba chiều, liên hệ *một tích phân bên trong một mặt với một tích phân trên biên của mặt đó*. Công thức có dạng:

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{curl } F \cdot d\vec{S},$$

trong đó *biên ∂S cần được định hướng tương thích với định hướng của S* .

Ví dụ: Công thức Stokes trong miền phẳng

Nếu S là một miền phẳng và $\vec{F}$ là một trường phẳng trên S thì

$$F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

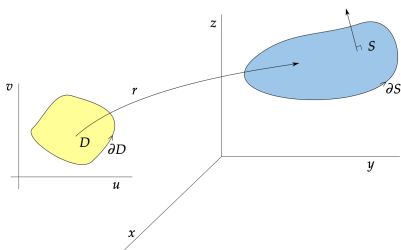
Công thức Stokes trở thành:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P \, dx + Q \, dy &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S (0, 0, Q_x - P_y) \cdot \vec{k} \, dS \\ &= \iint_S (Q_x - P_y) \, dS \\ &= \iint_S (Q_x - P_y) \, dx \, dy.\end{aligned}$$

Đây chính là Công thức Green.



Công thức Stokes ở dạng tham số



Cho miền phẳng D có biên ∂D là vết của đường γ có hướng tương thích với D và giả sử công thức Green có thể áp dụng được cho D .

Cho mặt r trơn cấp hai trên một tập mở chứa D . Gọi $\partial r = r \circ \gamma$ là đường biên của r .

Cho trường F trơn trên một tập mở chứa vết của r . Khi đó,

$$\int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} = \iint_r \text{curl } F \cdot d\vec{S}.$$

Ghi chú: Phát biểu trên phụ thuộc vào cách tham số hóa r và ∂r . Phần sau sẽ có phát biểu không phụ thuộc vào cách tham số hóa.

Chứng minh công thức Stokes ở dạng tham số

Phần chứng minh được thực hiện bằng các phép tính trực tiếp.

Viết $F = (P, Q, R)$ và $(x, y, z) = r(u, v)$ với $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Viết $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ với $a \leq t \leq b$ là tham số hóa theo định hướng dương của ∂D . Ta có:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} F \cdot d\vec{s} \\ &= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot \frac{d}{dt} r(u(t), v(t)) dt \\ &= \int_a^b F(r(u(t), v(t))) \cdot (r_u u'(t) + r_v v'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left[P(x, y, z)(x_u u'(t) + x_v v'(t)) + Q(x, y, z)(y_u u'(t) + y_v v'(t)) \right. \\ & \quad \left. + R(x, y, z)(z_u u'(t) + z_v v'(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

Sắp xếp các hạng tử, đặt u', v' là nhân tử chung, ta được:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} \\
 &= \int_a^b \left[(P(x, y, z)x_u + Q(x, y, z)y_u + R(x, y, z)z_u)u'(t) \right. \\
 & \quad \left. + (P(x, y, z)x_v + Q(x, y, z)y_v + R(x, y, z)z_v)v'(t) \right] dt \\
 &= \int_{\gamma} (Px_u + Qy_u + Rz_u) du + (Px_v + Qy_v + Rz_v) dv.
 \end{aligned}$$

Nhớ lại γ là biên của D nên ta áp dụng Công thức Green để được:

$$\int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} (Px_v + Qy_v + Rz_v) - \frac{\partial}{\partial v} (Px_u + Qy_u + Rz_u) \right] du dv.$$

Ta tính các đạo hàm sử dụng Quy tắc móc xích:

$$\frac{\partial}{\partial u}(Px_v) = (P_x x_u + P_y y_u + P_z z_u)x_v + Px_{uv},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(Qy_v) = (Q_x x_u + Q_y y_u + Q_z z_u)y_v + Qy_{uv},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(Rz_v) = (R_x x_u + R_y y_u + R_z z_u)z_v + Rx_{uv},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(Px_u) = (P_x x_v + P_y y_v + P_z z_v)x_u + Px_{uv},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(Qy_u) = (Q_x x_v + Q_y y_v + Q_z z_v)y_u + Qy_{uv},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(Rz_u) = (R_x x_v + R_y y_v + R_z z_v)z_u + Rz_{uv}.$$

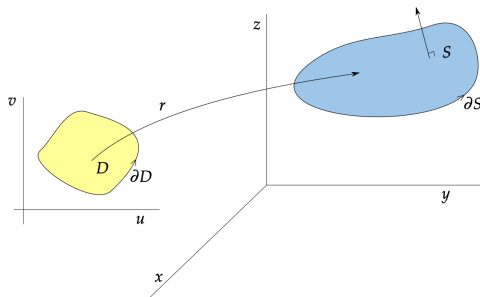
Thay vào biểu thức và đơn giản để được:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial r} F \cdot d\vec{s} \\ &= \iint_D \left[(R_y - Q_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (P_z - R_x)(z_u x_v - x_u z_v) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u) \right] du dv \\ &= \iint_D \left[\text{curl}(P, Q, R) \cdot (r_u \times r_v) \right] du dv \\ &= \iint_r \text{curl } F \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Đây là điều cần chứng minh.



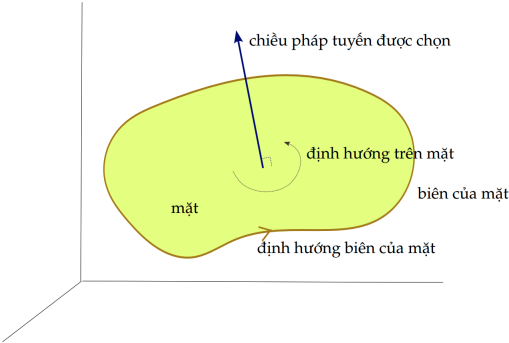
Hướng tương thích với mặt



Với mặt cong $S = r(D)$, ta gọi tập $r(\partial D)$, ảnh của biên của miền xác định của mặt, là **biên của mặt cong** S , ký hiệu là ∂S .

Nếu S được định hướng thì với r là một tham số hóa cùng định hướng của S , và γ là một tham số hóa theo định hướng tương thích của biên ∂D của miền phẳng D , thì **định hướng tương thích của biên của mặt** ∂S được cho bởi định hướng của đường $r \circ \gamma$.

Trong môn này biên của mặt cong thường được hình dung trực quan như phần “rìa” hay “bờ” của mặt cong, và thường được miêu tả một cách trực quan, thường thông qua hình vẽ.



Hình: Minh họa trực quan biên của mặt và định hướng biên của mặt: *tại một điểm gần biên đặt bàn tay phải sao cho ngón cái chỉ chiều của pháp tuyến thì lòng bàn tay hướng theo chiều của biên.*

Ghi chú

Khái niệm biên của mặt khác với khái niệm biên của tập con của không gian Euclid mà ta xét trong tích phân bội.

Ví dụ với một cái đĩa trong mặt phẳng thì hai loại biên này trùng nhau, nhưng với một nửa mặt cầu trong không gian ba chiều thì biên của mặt là một đường tròn, trong khi biên của tập con là cả nửa mặt cầu.

Công thức Stokes cho mặt cong

Giả sử S là vết của một mặt, mà miền xác định là một tập đóng bị chặn có diện tích của mặt phẳng có biên là vết của một đường chính quy từng khúc trên đó công thức Green áp dụng được.

Giả sử mặt này là đơn, chính quy, trơn cấp hai trên tập mở chứa miền xác định.

Giả sử S và ∂S có định hướng tương thích. Cho trường F trơn trên một tập mở chứa S . Khi đó,

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Chứng minh công thức Stokes (dạng độc lập với tham số hóa)

Lấy r là mặt đơn, chính quy trên miền phẳng đóng bị chặn D với vết S , đại diện cho định hướng của S .

Theo Định lý tích phân trên mặt cong ở chương trước, tích phân $\iint_r \text{curl } F \cdot d\vec{S}$ không phụ thuộc vào cách chọn tham số r .

Biên ∂D là vết của đường γ chính quy từng khúc. Đường $r \circ \gamma$ cũng chính quy từng khúc, nên tích phân $\int_{r \circ \gamma} F \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào cách chọn γ .

Mặt $S = r(D)$ và biên $\partial S = r(\partial D)$ có định hướng tương thích, nghĩa là γ có hướng tương thích với D theo công thức Green, định hướng của S được cho bởi r , và định hướng của ∂S được cho bởi đường $r \circ \gamma$.

Cuối cùng, kết quả của công thức Stokes cho trường hợp phụ thuộc vào tham số cho ta điều cần chứng minh. □

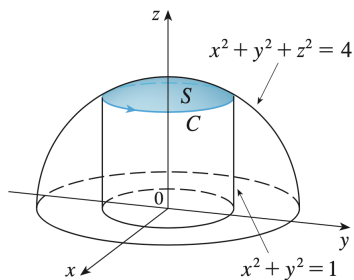
Công thức Stokes còn có thể được viết dưới dạng tọa độ:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P \, dx + Q \, dy + R \, dz &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dy \, dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \, dz \, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.\end{aligned}$$

Công thức trên thể hiện rõ sự tương tự với Công thức Green.

Ví dụ

Sử dụng Định lý Stokes để tính $\iint_S \text{curl } F \cdot d\vec{S}$, trong đó $F(x, y, z) = (xz, yz, xy)$ và S là một phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm bên trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ và bên trên mặt phẳng xy . Mặt S có vectơ pháp tuyến hướng lên trên.



Để sử dụng Định lý Stokes, ta cần biết biên $C = \partial S$ của S , nghĩa là ta cần giải phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

vì S nằm bên trên mặt phẳng xy .

Vì vậy, biên C được cho bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1$ và $z = \sqrt{3}$.

Đường cong C được tham số hóa bởi

$$r(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Đường cong C có hướng tương thích với mặt S , cùng định hướng với đề bài.

Vì $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, nên tích phân ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} &= \int_C F \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3} \cos t \sin t + \sqrt{3} \sin t \cos t \right) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$



Ví dụ

Cho trường $F(x, y, z) = (x^2, y^3, z^4)$ và C đường tam giác với các đỉnh $(1, 2, 3)$, $(2, 0, -1)$, và $(4, 3, 1)$, định hướng theo thứ tự đó. Tính $\int_C F \cdot d\vec{s}$.

Ta tính

$$\operatorname{curl} F(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^3 & z^4 \end{pmatrix} = (0, 0, 0).$$

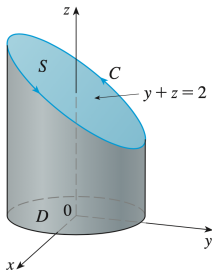
Áp dụng công thức Stokes, ta tìm được

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_D \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0.$$



Ví dụ

Sử dụng Định lý Stokes, tính tích phân $\int_C F \cdot d\vec{s}$, với trường $F(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ và C là đường cong giao tuyến giữa mặt phẳng $y + z = 2$ và hình trụ $x^2 + y^2 = 1$. Đường C được định hướng sao cho khi nhìn từ trên xuống thì đường C đi ngược chiều kim đồng hồ.



Trả lời

Ta tính đại lượng:

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{pmatrix} = (0, 0, 1 + 2y).$$

Gọi S là miền bị chặn bởi đường C với vectơ pháp tuyến hướng lên. Mặt S được miêu tả bởi:

$$S(x, y) = \left\{ (x, y, 2 - y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Ta có

$$S_x = (1, 0, 0), \quad S_y = (0, 1, -1), \quad S_x \times S_y = (0, 1, 1),$$

nên $S_x \times S_y$ là vectơ pháp tuyến hướng lên, cùng hướng tương thích với đề bài.

Tích phân cần tính là:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, 0, 1+2y) \cdot (0, 1, 1) dA.$$

Sử dụng tọa độ cực, ta được:

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F \cdot d\vec{S} &= \iint_D (0, 0, 1+2y) \cdot (0, 1, 1) dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+2y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+2r \sin t) r dr dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3 \sin t}{3} \right]_{r=0}^{r=1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin t \right) dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$



Cách khác của ví dụ trên

Gọi S_1 là mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ với $0 \leq z \leq 2 - y$ định hướng vào trong.
Ta có:

$$S_1(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z), \quad \text{với } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2 - \sin(\theta).$$

Ta tính $S_{1\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$, $S_{2z} = (0, 0, 1)$, và

$$S_{1\theta} \times S_{2z} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0),$$

nên với $\text{curl } F = (0, 0, 1 + 2y)$, ta có:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \text{curl } F \cdot d\vec{S} \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\sin(\theta)} (0, 0, 1 + 2\sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) dz d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Gọi D là miền trong mặt phẳng xy bên trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$, định hướng lên. Ta có:

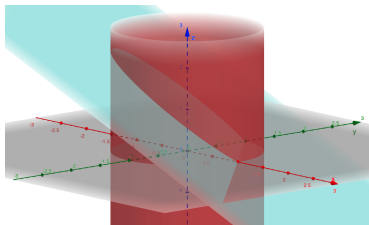
$$\begin{aligned}\iint_D \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} &= \iint_D \operatorname{curl} F \cdot \vec{k} dA \\&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 0, 1) dA \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin(\theta)) r dr d\theta \\&= \pi.\end{aligned}$$

Ta xem C là biên của hội các mặt S_1 và D với định hướng như ở trên. Khi đó, Định lý Stokes cho ta:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} + \iint_D \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = 0 + \pi = \pi. \quad \square$$

Ví dụ

Cho $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Gọi C là giao của mặt phẳng $x + y + z = 1$ với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, định hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ trên xuống. Tính tích phân $\int_C F \cdot d\vec{s}$ bằng hai cách: tính trực tiếp và dùng công thức Stokes.



Cách 1: Để tính trực tiếp tích phân $\int_C F \cdot d\vec{s}$, ta tham số hóa đường cong C .

Các điểm trên đường này thỏa:

$$\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Đường C được tham số hóa bởi:

$$C(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$$

với $0 \leq t \leq 2\pi$. Lưu ý rằng hướng của C là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống như giả thiết.

Vì $C'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t)$, tích phân đã cho là:

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin t - \cos t \sin t - \sin^2 t, \\ &\quad \cos t - \cos^2 t - \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, \sin t - \cos t) dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Cách 2: Sử dụng công thức Stokes, ta có:

$$\int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S},$$

với S là mặt giao giữa mặt phẳng $x + y + z = 1$ và $x^2 + y^2 \leq 1$, nhận C làm biên. Ta tính:

$$\operatorname{curl} F = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{pmatrix} = (-y, -z, -x),$$

và mặt phẳng S được tham số hóa bởi:

$$S(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Ta tính:

$$S_x = (1, 0, -1), \quad S_y = (0, 1, -1), \quad S_x \times S_y = (1, 1, 1).$$

Vectơ $S_x \times S_y = (1, 1, 1)$ hướng lên, phù hợp với định hướng trong công thức Stokes. Ta tính:

$$\begin{aligned} & \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-y, -1+x+y, -x) \cdot (1, 1, 1) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r \sin \theta - 1 + r \cos \theta + r \sin \theta - r \cos \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} d\theta \\ &= -\pi. \end{aligned}$$



Ghi chú

Trong công thức Stokes, khi tính tích phân mặt, ta chỉ cần biết giá trị của trường F trên đường biên C của mặt. Điều này có nghĩa rằng, nếu ta có một mặt cong khác với cùng đường biên C , thì giá trị tuyệt đối của tích phân mặt của F trong hai trường hợp là bằng nhau.

Một cách tổng quát, nếu S_1 và S_2 là hai mặt định hướng có cùng đường biên C thỏa giả thiết của Định lý Stokes, thì

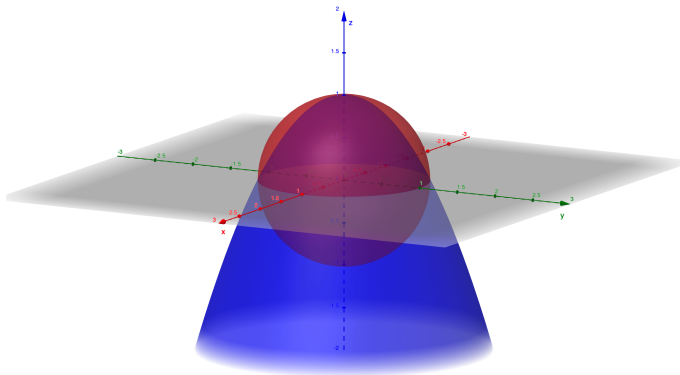
$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \int_C F \cdot d\vec{s} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$

Ví dụ

Trong $\mathbb{R}^3$ cho S_1 là nửa mặt cầu trên $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$; và S_2 là mặt paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$. Cả hai được định hướng lên trên.

Cho F là một hàm trơn trên $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}.$$



Ta thấy ∂S_1 thỏa phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

nên được miêu tả bởi phương trình tham số:

$$C_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

có định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống, tương thích với mặt S_1 . Công thức Stokes cho

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} F \cdot d\vec{s}.$$

Ta thấy ∂S_2 thỏa phương trình:

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Ta thấy phương trình miêu tả ∂S_2 cũng là ∂S_1 , nên ta chọn tham số cho ∂S_2 là $C_2(t) = C_1(t)$ với $0 \leq t \leq 2\pi$. Tham số này có định hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống, tương thích với mặt S_2 . Áp dụng công thức Stokes, ta có:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial S_2} F \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} F \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} F \cdot d\vec{s} \\ &= \iint_{S_1} \operatorname{curl} F \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh. □